Zur Theorie des pseudoskalaren Mesonenfeldes in pseudovektorieller Kopplung an das Nukleonenfeld

Von F. Penzlin *

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Leipzig **

(Z. Naturforschg. **10a**, 216—219 [1955]; eingegangen am 11. Januar 1955)

Es wird gezeigt, daß die Theorie des pseudoskalaren Mesonenfeldes mit pseudovektorieller Kopplung an ein Dirac-Feld sich auch mit Hilfe des Kunstgriffes von Hu[1] nicht renormieren läßt. Dieser Nachweis erfolgt mit Hilfe der von Dyson[2] in der Quantenelektrodynamik entwickelten Methoden.

Nachdem die Quantenelektrodynamik durch die Arbeiten von Tomonaga, Schwinger[3] und Dyson[2] zu einem gewissen Abschluß gekommen war, versuchten zahlreiche Autoren, auch andere Feldtheorien in eine ähnlich abgerundete Form zu bringen. Das sich dabei ergebende Hauptproblem ist die Behandlung der Divergenzen der S-Matrix. Es zerfällt in zwei Teile:

A. Die Aufstellung eines kovarianten, eindeutigen und widerspruchsfreien *Separationsverfahrens* für diese Divergenzen. Durch Streichung der so abseparierten divergenten Teile erhält man eine Theorie, in der alle Elemente der S-Matrix in jeder störungstheoretischen Näherung endliche und eindeutig bestimmte Werte besitzen.

B. Die *Renormierung,* d. i. der Nachweis, daß man die so konvergent gemachten Matrixelemente unmittelbar aus einer Feldtheorie gewinnen kann, die sich von der ursprünglichen Theorie nur durch die Definition der in ihr vorkommenden Feldfunktionen und Konstanten unterscheidet. Erst durch die Renormierung erhält die Streichung der Divergenzen ihre physikalische Rechtfertigung. Die dabei auftretenden „Renormierungskonstanten" selbst besitzen jedoch keine endlichen Werte, sondern sind durch divergente Integrale dargestellt.

Für einige Mesontheorien sind, wie in der Quantenelektrodynamik, beide Punkte dieses Programms durchführbar. Im Falle des hier interessierenden pseudoskalaren Feldes in Pseudovektorkopplung an ein Diracfeld ist die Übertragung der Dysonschen Methode jedoch nicht ohne weiteres möglich. Die Schwierigkeit besteht zunächst darin, daß es in diesem Falle (im Gegensatz zur Quantenelektrodynamik) eine unendliche Anzahl verschiedener Divergenzen gibt, so daß schon der Punkt A des Programms nicht durchführbar ist. Schon gar nicht kann man erwarten, daß sich alle diese Divergenzen durch endlich viele Renormierungskonstanten ausdrücken lassen. Ungeklärt ist jedoch die Frage, ob man solche „nichtrenormierbaren" Theorien künstlich renormierbar machen kann.

Hu[1] hat einen in dieser Richtung gehenden Vorschlag gemacht. Durch einen Kunstgriff gelang es ihm, die Zahl der Divergenztypen auf drei zu reduzieren. Damit bereitet der Punkt A unseres Programmes nunmehr keine Schwierigkeiten. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit nachzuweisen, daß der Punkt B des Programmes sich auch jetzt nicht durchführen läßt.

Es wird sich zeigen, daß es keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt, wenn wir uns im folgenden auf den (einfachsten) Fall des ungeladenen Mesonenfeldes beschränken. Wir legen also die folgende Lagrange-Funktion: ($\hbar = c = 1$)

$$L = L_{\mathrm{m}} + L_{\mathrm{n}} + L_{\mathrm{w}} + L'_{\mathrm{w}} + L''_{\mathrm{w}},$$

$$\begin{aligned}
L_{\mathrm{m}} &= -\tfrac{1}{2}\,(\varphi_{|\mu}\,\varphi_{|\mu} + \varkappa^2\,\varphi^2)\,,\\
L_{\mathrm{n}} &= -\{\overline{\psi}\,\gamma_\mu\,\psi_{|\mu} + \varkappa_0\,\overline{\psi}\,\psi\},\\
L_{\mathrm{w}} &= -g\,\varphi_{|\mu}\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\gamma_\mu\,\psi\,,\\
L'_{\mathrm{w}} &= -\tfrac{1}{2}\,\delta\,\varkappa^2\cdot\varphi^2 - \delta\,\varkappa_0\,\overline{\psi}\,\psi\,,\\
L''_{\mathrm{w}} &= -\tfrac{1}{2}\,\delta_1\,\varkappa^2\cdot\varphi^2 - \tfrac{1}{2}\,\delta g\,(\varphi_{|\mu}\,\varphi_{|\mu} + \varkappa^2\,\varphi^2)
\end{aligned}$$

unseren Betrachtungen zugrunde.

* Estenfeld b. Würzburg, Maidbronnerstraße 5.

** Auszug aus der Diss. des Verf., Leipzig 1953; Referenten: Prof. Dr. B. Kockel, Prof. Dr. E. Hölder.

[1] N. Hu, Phys. Rev. **80**, 1109 [1950].

[2] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486, 1736 [1949].

[3] S. Tomonaga, Progr. theor. Phys. **1**, 27 [1946]; J. Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 [1948]; **75**, 651; **76**, 790 [1949].

§ 1. Konvergenzverhalten der Matrixelemente

Wir bedienen uns der Graphenmethode von Feynman[4]. Lassen wir zunächst L'_{w} und L''_{w} beiseite, so hat ein Graph N. Ordnung folgendes Aussehen: Er besitzt N Knoten (= „vertex"); an jedem Knoten befindet sich eine einlaufende und eine auslaufende Nukleonlinie sowie eine Mesonlinie; die Nukleonlinien bilden durchgehende Linienzüge, die beiderseits offen sind oder in sich zurücklaufen. Hieraus erkennt man unmittelbar die Beziehungen

$$I_{\mathrm{n}} = N - \tfrac{1}{2} E_{\mathrm{n}}, \qquad I_{\mathrm{m}} = \tfrac{1}{2} (N - E_{\mathrm{m}}),$$

wo I_{n} (E_{n}) bzw. I_{m} (E_{m}) die Zahl der inneren (äußeren) Nukleon- bzw. Mesonlinien angibt.

Die Übersetzung eines solchen Graphen in ein Integral geschieht nach den bekannten Regeln: (k_μ ist der der jeweiligen Linie zugeordnete 4-Impuls)

1.) jeder inneren Mesonlinie entspricht ein Faktor:

$$D^{\mathrm{c}}(k) = (k^2 + \varkappa^2)^{-1},$$

2.) jeder inneren Nukleonlinie entspricht ein Faktor: $S^{\mathrm{c}}(k) = (\gamma_\mu k_\mu - i \varkappa_0)^{-1}$,

3.) jedem Knoten entspricht ein Faktor:

$$\gamma_5 \gamma_\mu k_\mu \delta (k + k' + k''),$$

wo k_μ der Meson-, k'_μ der Nukleonimpuls des einlaufenden und k''_μ der des auslaufenden Nukleons ist,

4.) wird über die Impulse aller inneren Linien integriert.

Die weiteren Regeln spielen für das folgende keine Rolle.

Untersuchen wir nun nach dem Vorgange von Dyson[2] das Konvergenzverhalten der so gebildeten Integrale. Der Integrand hat die Ordnung: $s = -I_{\mathrm{n}} - 2 I_{\mathrm{m}} + (N - E_{\mathrm{m}}) = 1/2\, E_{\mathrm{n}} - N$. Die Zahl der Integrationen ist, wenn wir die δ-Funktionen (bis auf eine, die den Gesamtenergie-Impulssatz liefert) herausintegriert denken:

$$r = 4 (I_{\mathrm{m}} + I_{\mathrm{n}} - N + 1) = 2 (N + 2 - E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{n}}).$$

Nun lautet die Dysonsche Konvergenzbedingung:

$$s + r = N - E_{\mathrm{n}} - 2 E_{\mathrm{m}} + 4 < 0.$$

Es sind also die Beiträge zu einem bestimmten Matrixelement (wenn also E_{n} und E_{m} gegeben sind) von der Ordnung $N' = E_{\mathrm{n}} + 2 E_{\mathrm{m}} - 4$ an alle divergent. Dieses von der Quantenelektrodynamik ganz verschiedene Verhalten rührt von den Knotenfaktoren 3.) her.

Um nun trotzdem zu einer Durchführung des Programmpunktes A zu kommen, hat Hu[1] einen Kunstgriff vorgeschlagen, den wir hier skizzieren wollen. Zunächst wird das zu dem in der Abb. 1 gezeigten Graphen gehörende Meson-Selbstenergie-Integral niedrigster (g^2-)Näherung:

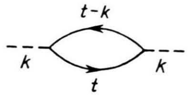

Abb. 1.

$$M_{\mathrm{s}}(k) = (2\pi)^{-4} \int (\mathrm{d}t)\ \mathrm{Spur}\left\{ (\boldsymbol{t} - \boldsymbol{k} - i \varkappa_0)^{-1} \gamma_5 \boldsymbol{k} (\boldsymbol{t} - i \varkappa_0)^{-1} \gamma_5 \boldsymbol{k} \right\}$$

berechnet [dabei ist $(\mathrm{d}t)$ das vierdimensionale Volumelement im t-Raum und $\boldsymbol{t} = \gamma_\mu t_\mu$, $\boldsymbol{k} = \gamma_\mu k_\mu$]. Die Auswertung wurde schon von Feynman[4] gegeben (vgl. auch Pauli[5]), das Resultat lautet:

$$M_{\mathrm{s}}(k) = -\tfrac{1}{2} \delta_1 \varkappa^2 - \tfrac{1}{2} (k^2 + \varkappa^2) \delta g + \mu_{\mathrm{s}}(k),$$

wo $\delta_1 \varkappa^2$ und δg von k unabhängige Konstanten sind (die gegen ∞ gehen, wenn der Regularisierungsparameter $\lambda \to \infty$). Ihre genaue Gestalt ist hier nicht von Bedeutung. Ferner ist:

$$\mu_{\mathrm{s}}(k) = -\frac{g^2}{3} k^2 \left\{ k^2 + \varkappa^2 + 4 \varkappa_0^2 \left(\frac{\varkappa^2 \vartheta_0}{\operatorname{tg} \vartheta_0} + \frac{k^2 \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta} \right) \right\},$$

wo $k^2 = 4 \varkappa_0^2 \sin^2 \vartheta$, $\varkappa^2 = 4 \varkappa_0^2 \sin^2 \vartheta_0$.

Bisher haben wir nur von L_{w} gesprochen. Betrachten wir jetzt jedoch L''_{w} (L'_{w} kommt erst später zur Sprache), so kompensieren dessen Terme gerade die ersten beiden Glieder in der Darstellung von M_{S} (durch diese Forderung sind die beiden in L''_{w} auftretenden Konstanten festgelegt). Nach dieser „vorläufigen Renormierung" hat das Meson-Selbstenergie-Integral in seiner g^2-Näherung den endlichen Wert $\mu_{\mathrm{s}}(k)$. Kombinieren wir nun einen Graphen, der keinen Teilgraphen der in der Abb. 1 angegebenen Form (im folgenden kurz SE-Teil genannt) enthält, mit allen Graphen, die mit ihm übereinstimmen, außer daß sie in einer bestimmten inneren Mesonlinie 1, 2, . . . SE-Teile besitzen, so ergibt sich der Gesamtbeitrag aller dieser Graphen, indem wir in dieser Linie $D^{\mathrm{c}}(k)$ durch

$$D^{\mathrm{v}}(k) = D^{\mathrm{c}}(k) [1 - \mu_{\mathrm{s}}(k) D^{\mathrm{c}}(k)]^{-1}$$

ersetzen. Stellen wir diese Betrachtung nacheinander für alle inneren Mesonlinien an, so bedeutet das, daß generell D^{c} durch D^{v} zu ersetzen ist. We-

[4] R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749, 769 [1949].

[5] W. Pauli, Feldquantisierung, S. 39.

gen $\mu_s(k) = O(k^4)$ für $k^2 \to \infty$ verhält sich $D^v(k) = O(k^{-4})$. Allerdings ist $D^v(k)$ eine transzendente Funktion in k^2.

Wiederholen wir jetzt die oben angestellte Konvergenzbetrachtung mit dieser neuen Funktion D^v, so hat der Integrand jetzt die Ordnung:

$$s = -I_n - 4 I_m + N - E_m = \tfrac{1}{2} E_n + E_m - 2N,$$

so daß die Dysonsche Konvergenzbedingung lautet:

$$s + r = -\tfrac{3}{2} E_n - E_m + 4 < 0\,.$$

Das ist aber genau die in der Quantenelektrodynamik gültige Ungleichung. Es gibt also jetzt auch hier nur noch die vier durch die Graphentypen der Abb. 2 dargestellten „primitiven Divergenzen“

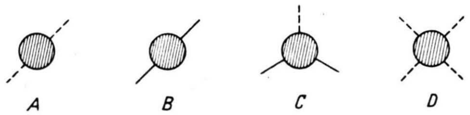

Abb. 2.

(das sind nach Dyson diejenigen Integrale, die auch dann noch divergieren, wenn von allen Teilintegrationen die divergenten Teile gestrichen werden). Schließlich bemerkt Hu[1], daß die „Divergenz“ eines D-Teils mit dem entsprechenden Ausdruck der Quantenelektrodynamik übereinstimmt, mithin verschwindet.

§ 2. Renormierung

Nunmehr können wir das von Dyson[2] entwickelte und von Salam[6] (insbesondere bezüglich der sogenannten b-Divergenzen) verbesserte Subtraktionsverfahren anwenden. Zu dem Zweck führen wir die folgenden Abkürzungen ein: Π, Σ, Λ sei die Summe aller einfachen A-, B- und C-Teile. Durch einen Querstrich bezeichnen wir die nach dem Subtraktionsverfahren gewonnenen konvergenten Teile: $\overline{\Pi}$, $\overline{\Sigma}$, $\overline{\Lambda}$, usw. Ferner seien die „renormierten Ausbreitungsfunktionen“:

$$\overline{D} = D^v(1 - \overline{\Pi} D^v)^{-1}, \; \overline{S} = S^c(1 - \overline{\Sigma} S^c)^{-1}, \; \overline{\Gamma} = \gamma_5 \boldsymbol{k} + \overline{\Lambda}. \tag{1}$$

Das Integral, das entsteht, wenn man an Stelle von D^v, S^c und $\gamma_5 \boldsymbol{k}$ die Ausdrücke $\overline{D}$, $\overline{S}$ und $\overline{\Gamma}$ einführt, sei mit einem Stern bezeichnet. Schließlich sei G ein irreduzibler eigentlicher Graph, d. h. ein Graph, der weder zerfällt noch A-, B- oder C-Teile enthält, und $M(G)$ die Summe der Beiträge aller Graphen $m(G_i)$, die aus G durch Einsetzen aller möglichen A-, B- und C-Teile entstehen. Dann ist $m^*(G) = \overline{M}(G)$, wenn G nicht gerade einer der in Abb. 2 gezeigten A-, B- oder C-Graphen ist. In diesen drei Ausnahmefällen gilt nach Salam[6]:

$$\begin{aligned} \pi^* &= (1 - L^*)^{-2}\{\alpha_m^* + (k^2 + \varkappa^2)\beta_m^* + \overline{\Pi}\} + \delta\varkappa^2, \\ \sigma^* &= (1 - L^*)^{-2}\{\alpha_n^* + (\boldsymbol{k} - i\varkappa_0)\beta_n^* + \overline{\Sigma}\} + \delta\varkappa_0, \\ \lambda^* &= \gamma_5 \boldsymbol{k} L^* + \overline{\Lambda}. \end{aligned} \tag{2}$$

Die jeweils letzten Terme in den ersten beiden Gleichungen ergeben sich aus L_w'. Soll die Theorie nun renormierbar sein, so muß zwischen den „exakten Ausbreitungsfunktionen“:

$$D' = D^v(1 - \Pi D^v)^{-1}, \quad S' = S^c(1 - \Sigma S^c)^{-1}, \quad \Gamma' = \gamma_5 \boldsymbol{k} + \Lambda \tag{3}$$

und den renormierten Ausbreitungsfunktionen ein Zusammenhang der Gestalt

$$D'(g) = z_1 \overline{D}(\overline{g}), \; S'(g) = z_2 \overline{S}(\overline{g}), \; \Gamma'(g) = z_3^{-1} \overline{\Gamma}(\overline{g}), \quad g = Z\overline{g} \tag{4}$$

mit Konstanten z_1, z_2, z_3 und Z bestehen. Dabei ist die jeweilige Kopplungskonstante, mit der die Integrale zu berechnen sind, explizit angegeben. Nun erkennt man zunächst, daß für einen (irreduziblen) Graphen N. Ordnung G_N (der kein A-, B-, C-Teil sei) die Beziehung besteht:

$$\begin{aligned} m'(G_N, g) &= M(G_N, g) \\ &= z_1^{\frac{1}{2} E_m + I_m} z_2^{\frac{1}{2} E_n + I_n} z_3^{-N} m^*(G_N, \overline{g})\,. \end{aligned}$$

Nehmen wir $Z = z_1^{-\frac{1}{2}} z_2^{-1} z_3$ an, so ist:

$$g^N M(G_N, g) = \overline{g}^N \overline{M}(G_N, \overline{g})\,.$$

Für A-, B- bzw. C-Teile gilt dagegen:

$$\Pi(g) = z_1^{-1} z_3^2 \pi^*(\overline{g}), \quad \Sigma(g) = z_2^{-1} z_3^2 \sigma^*(\overline{g}), \quad \Lambda(g) = z_3^{-1} \lambda^*(\overline{g})\,.$$

Ersetzen wir hier nun die gesternten Größen durch die in (2) angegebenen Ausdrücke und substituieren das so erhaltene Resultat in (3), so ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned} D' &= D^v\left[1 - \frac{z_1^{-1} z_3^2}{(1 - L^*)^2}\{(1 - L^*)^2\,\delta\varkappa^2 + \alpha_m^* + (k^2 + \varkappa^2)\beta_m^* + \overline{\Pi}\} D^v\right]^{-1} = z_1 D^v[1 - \overline{\Pi} D^v]^{-1}, \\ S' &= S^c\left[1 - \frac{z_2^{-1} z_3^2}{(1 - L^*)^2}\{(1 - L^*)^2\,\delta\varkappa_0 + \alpha_n^* + (\boldsymbol{k} - i\varkappa_0)\beta_n^* + \overline{\Sigma}\} S^c\right]^{-1} = z_2 S^c[1 - \overline{\Sigma} S^c]^{-1}, \\ \Gamma' &= \gamma_5 k + z_3^{-1}\{\gamma_5 k L^* + \overline{\Lambda}\} = z_3^{-1}\{\gamma_5 k + \overline{\Lambda}\}. \end{aligned}$$

[6] A. Salam, Phys. Rev. 82, 217; 84, 427 [1951].

Dabei folgen die rechten Seiten dieser Gleichungen aus (4) durch Einsetzen von (1). Die letzte Gleichung liefert unmittelbar: $z_3 = 1 - L^*$. In der vorletzten Gleichung legen wir $\delta \varkappa_0$ durch $\delta \varkappa_0 = -z_3{}^2 \alpha_n^*$ fest und erhalten wegen $S^c = (k - i \varkappa_0)^{-1}$ sofort $z_2 = 1 + \beta_n^*$. Schließlich könnte man in der ersten Gleichung noch $\delta \varkappa^2$ durch $\delta \varkappa^2 = -z_3{}^2 \alpha_m^*$ festlegen, aber der sich ergebende Ausdruck $z_1 = 1 + (k^2 + \varkappa^2) D^v(k) \beta_m^*$ ist nicht konstant, da D^v, nicht $D^c = (k^2 + \varkappa^2)^{-1}$, hier auftritt. Damit ist also gezeigt, daß die Annahme der Renormierungsgl. (4) zu Widersprüchen führt.

Der hiermit geführte Beweis der Unmöglichkeit einer Renormierung beruht nur auf dem transzendenten Charakter der Funktion $D^v(k)$. Da in der Theorie des geladenen Mesonenfeldes dieselbe Funktion auftritt, gilt dieses Resultat auch für sie. Es ist sogar zu vermuten, daß bei jedem Versuch einer „künstlichen Renormierung" einer nichtrenormierbaren Theorie ein solches Verhalten auftritt und damit eine wirkliche Renormierung nicht möglich ist.

Auf eine andere, mit dem Auftreten solcher transzendenter Funktionen zusammenhängende Schwierigkeit hat Feldman[7] hingewiesen: Mit ihr kommen neue (komplexe) Pole und damit neue Divergenzen in die Theorie hinein. Sie lassen sich nur durch eine sehr künstliche Wahl des Integrationsweges umgehen. Schließlich hat Lehmann[8] gezeigt, daß die *exakten* Ausbreitungsfunktionen D' und S' sich für $k^2 \to \infty$ genau so verhalten wie die D^c-und S^c-Funktionen selbst. Demnach scheint das hier zugrunde liegende Näherungsverfahren zur Berechnung der exakten Ausbreitungsfunktionen für eine Beschreibung des asymptotischen Verhaltens ungeeignet zu sein.

Der Sinn und die Berechtigung des Streichens der Divergenzen bleibt damit im Falle des hier behandelten pseudoskalaren Feldes in pseudovektorieller Kopplung durchaus unklar. Es ist sehr fraglich, ob das hier angewandte Subtraktionsverfahren vor anderen irgendwie ausgezeichnet ist. Deshalb ist es auch fraglich, ob man den konvergenten Teil der Theorie als Beschreibung der in der Natur auftretenden Erscheinungen betrachten darf.

Herrn Prof. Dr. B. Kockel möchte ich an dieser Stelle für sein förderndes Interesse an meiner Arbeit danken.

[7] G. Feldman, Proc. Roy. Soc. A **223**, 112 [1954]; vgl. auch N. Hu, Chinese J. Phys. 8, 40 [1951].

[8] H. Lehmann, Nuovo Cim. **11**, 342 [1954]. Herrn Dr. H. Lehmann verdanke ich auch den Hinweis auf diese Seite des Problems und auf die beiden vorstehend zitierten Arbeiten.

Das Energiespektrum der Protonen in der Höhenstrahlung auf Seehöhe

Von H. Filthuth*

Aus dem II. Physikalischen Institut der Universität Heidelberg

(Z. Naturforschg. **10a**, 219—229 [1955]; eingegangen am 22. Dezember 1954)

Mit einem Proportionalzählrohr-Teleskop konnte die vertikal einfallende Protonenkomponente 150 m über Seehöhe zwischen 18 MeV und 350 MeV analysiert werden. Die Energie der Protonen wurde aus ihrer Reichweite bestimmt. Das ermittelte differentielle Energiespektrum hat ein Maximum zwischen 80 MeV und 100 MeV und fällt nach höheren Energien rasch ab. Für den vertikalen Fluß der Protonen zwischen 18 MeV und 350 MeV erhält man $0{,}56 \cdot 10^{-4}/\text{cm}^2$ sec steradian.

Die Primärteilchen der Höhenstrahlung verlieren beim Eindringen in die Atmosphäre ihre Energie hauptsächlich in Zusammenstößen mit den Atomkernen der Luft. Ihre Energie verteilt sich dabei auf die bei diesen Kernprozessen emittierten Protonen, Neutronen, π-Mesonen und Kernbruchstücke, die, wenn sie energiereich genug sind, ihrerseits wieder Kernumwandlungen erzeugen, so daß die auf Seehöhe beobachteten Protonen überwiegend sekundären Ursprungs sind.

Mylroi und Wilson[1] untersuchten mit einem magnetischen Spektrographen das Impulsspektrum der Protonen auf Seehöhe. Sie fanden, daß ungefähr 1% der auf Seehöhe vertikal einfallenden

* jetzt CERN, Genf, Schweiz.

[1] M. G. Mylroi u. J. G. Wilson, Proc. Phys. Soc., Lond. **64**, 404 [1951].